This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABN2998
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B42421
035/2: : |a (CaOTULAS)160032174
040: : |a RPB |c RPB |d MiU
100:1 : |a Deuren, Pierre van, |d b. 1878.
245:00: |a Étude géométrique des lignes & des surfaces en un point ordinaire. |b Représentation géométrique des derivées, |c par Pierre Vandeuren.
260: : |a Bruxelles, |b J. Lebègue & cie |c [1902]
300/1: : |a 40 p. |c 23 cm.
650/1: 0: |a Geometry, Differential
650/2: 0: |a Curves, Plane
998: : |c RHJ |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DES LIGNES & DES SURFACES

EN UN POINT ORDINAIRE

Représentation géométrique des dérivées

PAR

Pierre VANDEUREN
SOUS-LIEUTENANT DU GÉNIE

BRUXELLES
J. LEBÈGUE & Cie, LIBRAIRES-ÉDITEURS
46, RUE DE LA MADELEINE, 46

Hosted by Google

W. Vandenneu

Anvers

Belgique

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DES LIGNES & DES SURFACES

EN UN POINT ORDINAIRE

Représentation géométrique des dérivées

Hosted by Google

Bruxelles. — Imprimerie J. JANSSENS, 25, rue des Armuriers.

Hosted by Google

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE

DES LIGNES & DES SURFACES

EN UN POINT ORDINAIRE

Représentation géométrique des dérivées

PAR

Pierre VANDEUREN
SOUS-LIEUTENANT DU GÉNIE

BRUXELLES
J. LEBÈGUE & Cie, LIBRAIRES-ÉDITEURS
46, RUE DE LA MADELEINE, 46

Hosted by Google

Hosted by Google

TABLE DES MATIÈRES

		PAGES
	Avant-propos	7
I.	Représentation géométrique des dérivées	11
II.	Éléments géométriques en un point ordinaire d'une courbe gauche	13
III.	Éléments géométriques d'une surface en un de ses points ordinaires	15
IV.	Relations entre les éléments géométriques d'une surface et des lignes tracées sur celle-ci	20
V.	Application à la définition du contact des surfaces et des courbes	22
VI.	Relations entre les éléments géométriques d'une courbe commune à deux surfaces et les éléments géométriques de celles-ci	23
VII.	Relations entre les éléments géométriques et les dérivées générales en un point de la courbe	26
VIII.	Relations entre les éléments géométriques et les dérivées partielles générales en un point d'une surface	28
IX.	Détermination pratique des éléments géométriques de surfaces dans certains cas particuliers et examen de quelques catégories de surfaces connues	29
X.	Des surfaces de raccordement le long de la génératrice d'une surface réglée	32
XI.	Détermination des hyperboloïdes de raccordement le long de la génératrice de quelques surfaces réglées	37

Hosted by Google

Hosted by Google

AVANT-PROPOS

1. La *résolution géométrique* d'un problème où interviennent les données de l'analyse infinitésimale se présente souvent de la manière suivante :

On possède quelques *instruments géométriques*, c'est-à-dire des représentations de fonctions plus ou moins compliquées de dérivées d'équations de courbes et de surfaces ; par exemple, le plan osculateur en un point d'une courbe.

Le problème se réduisant, en dernière analyse, en une série d'opérations entre les dérivées intervenant dans la question, la représentation géométrique de la solution exige alors trois séries d'opérations, que l'on peut représenter schématiquement comme suit :

1° Résolution du problème $= \varphi_1$ (dérivées) ;

2° Dérivées $= \varphi_2$ (instruments géométriques) ;

3° Résolution du problème $= \varphi_1$ [φ_2 (instruments géométriques)] $= \varphi_3$ [instruments géométriques].

La fonction finale φ_3 constitue la solution géométrique du problème ; on entrevoit immédiatement que l'on peut en compliquer singulièrement la recherche, en utilisant des fonctions φ_2 qui n'ont en général rien de commun avec les fonctions φ_1, lesquelles doivent être supposées quelconques.

2. On peut simplifier notablement les opérations, en utilisant *des instruments représentant directement les dérivées.*

La fonction φ_1 constitue alors la solution géométrique du problème, et la recherche des fonctions φ_2 et φ_3 disparaît du coup.

Mais d'autres avantages sont encore réalisés :

1° La résolution géométrique du problème marche de front

Hosted by Google

avec la résolution analytique; les deux procédés peuvent donc s'entr'aider à chaque instant;

2° La détermination des instruments géométriques ne nécessite plus aucune définition nouvelle, et la généralisation complète de ces quantités est connue pour tous les ordres de différentiation;

3° La méthode tourne les difficultés qui accompagnent la conception géométrique de la grandeur-limite.

Ces difficultés existent. Ainsi, par exemple, si l'on définit le centre de courbure comme étant la limite du point de rencontre de deux normales qui se rapprochent indéfiniment, la représentation graphique ne permet plus de *voir* lorsqu'on se rapproche de la limite; elle provoque plutôt le trouble, puisque les normales tendent à se confondre; celles-ci se confondent d'ailleurs réellement à la limite.

La recherche analytique de la limite offre heureusement des résultats clairs et tangibles qui donnent tous les apaisements; il est donc logique d'appuyer les bases de la représentation graphique sur ces recherches analytiques seulement, en écartant systématiquement des définitions des instruments fondamentaux, la conception nouvelle et inutile de la limite géométrique.

Le procédé a d'ailleurs l'avantage de ne plus aborder directement les difficultés qui forment la caractéristique du calcul différentiel : ces difficultés sont vaincues, une fois pour toutes, lors de la définition et de l'établissement de la valeur des dérivées. Enfin, la représentation graphique possède ainsi son véritable caractère, qui est celui d'une *application* du calcul des dérivées, et les opérations géométriques conservent toute leur rigueur et leur clarté (*);

4° Enfin, on verra que le procédé permet de résoudre la plupart des problèmes à l'aide de la règle et du compas, car la représentation des dérivées est réalisée à l'aide de plans, de droites et de cercles.

(*) Nous croyons que l'introduction dans les multiples applications du calcul différentiel du procédé qui est préconisé ici pour la géométrie serait du plus heureux effet; nous nous proposons de faire connaître bientôt les bases de la cinématique modifiées dans ce sens.

Hosted by Google

3. Est-il nécessaire de montrer que l'ensemble des méthodes disparates actuelles réalise très mal les divers avantages qui viennent d'être signalés ?

1° Certains instruments géométriques nécessitent des recherches compliquées ; par exemple, le rayon de torsion en un point d'une courbe gauche.

2° Les représentations géométriques actuelles ne sont pas générales ; à peine peut-on pratiquement résoudre les questions où interviennent les dérivées du deuxième ordre.

3° Les instruments formant la base de la représentation sont des limites de grandeurs géométriques plus ou moins compliquées dépendant des courbes ou des surfaces représentées.

4° Les instruments qui sont employés avec quelque succès sont la tangente, le plan tangent, le rayon de courbure, le plan osculateur, l'indicatrice de Dupin.

On retrouvera précisément des éléments géométriques analogues en considérant directement les dérivées. On les représente donc depuis longtemps, jusqu'au deuxième ordre, d'une façon inconsciente et détournée. L'ancien procédé est d'ailleurs très inférieur, car il donne aux instruments des significations étroites et particulières, dont la généralisation est difficile lorsqu'on veut passer aux ordres supérieurs de différentiation.

5° Il n'y a pas lieu de craindre que quelques-unes des propriétés des instruments, qui leur étaient reconnues par les définitions antérieures, échappent dans le nouveau procédé de définition. Ces propriétés seront aisément retrouvées, *comme application cette fois*, principalement en se servant du développement de Taylor.

Ainsi, la tangente en un point A d'une courbe peut être obtenue par la simple considération des dérivées (**12**). En se servant du développement de Taylor, on pourra aisément prouver que cette tangente représente, avec l'approximation que l'on voudra, la droite joignant A à un point de la courbe qui lui est indéfiniment voisin (*).

(*) Nous contestons absolument la critique qui nous a été faite et qui qualifie d'*artificielle* la méthode que nous proposons.

Dans l'exemple qui vient d'être cité, il est évident qu'un grand nombre d'applications géométriques de la tangente découlent directement de la

Hosted by Google

4. L'étude qui va suivre est le développement de la représentation géométrique des dérivées, établie dans le but qui vient d'être indiqué.

---

propriété qui lui est reconnue; à ce point de vue, il aurait donc été plus logique de lui donner une définition qui serait en rapport immédiat avec cette propriété.

Mais nous croyons avoir suffisamment prouvé que l'instrument ainsi obtenu est inférieur, quant à la compréhension, et que s'il a un avantage à un point de vue particulier, il rompt la généralité d'une règle et d'une méthode qui embrassent tous les instruments congénères.

D'ailleurs, une méthode tout aussi générale — l'emploi du développement de Taylor — conduit des définitions rigoureuses des instruments à leurs propriétés géométriques.

Il semble donc que l'on ne pourrait agir avec moins d'artifices; peut-on en dire autant des procédés qui, partant de chacune de ces propriétés en particulier, torturent une expression pour arriver, après un passage à la limite quelquefois compliqué, à un instrument dont l'expression analytique est d'ailleurs quelconque?

Hosted by Google

CHAPITRE Ier

Représentation géométrique des dérivées

5. La *représentation géométrique complète* d'une dérivée comporte les quatre opérations suivantes :

1° Représenter la valeur absolue de la dérivée ;

2° Représenter les directions positives des trois axes par rapport auxquels la dérivée est établie ;

3° Représenter le signe de la dérivée ;

4° Représenter le mode de variation de ce signe avec celui des directions positives des axes de coordonnées.

VALEUR ABSOLUE DES DÉRIVÉES

6. Les surfaces et les lignes sont représentées par une ou deux fonctions de la forme

$$z = f(x, y)$$

entre les trois coordonnées d'un système d'axes orthogonaux.

La dérivée partielle générale de cette fonction

$$\frac{d^{p+q}z}{dx^p\, dy^q}$$

se présente sous la forme d'une grandeur ayant les dimensions

$$\left[\text{grandeur linéaire}\right]^{-p-q+1}.$$

On représentera la dérivée par une grandeur linéaire qui, mesurée à l'aide de la grandeur linéaire-unité, représente le nombre exprimant cette dérivée à l'aide de la $-(p+q-1)^{\text{ième}}$ puissance de la grandeur-unité.

Cette grandeur représentative est portée sur une parallèle à un des axes de coordonnées, à partir d'un point M, origine.

DIRECTION POSITIVE DES AXES

7. En faisant la convention de porter une grandeur représentée vers la direction positive de l'axe de coordonnée à partir du point M, on détermine réciproquement la direction positive de l'axe, par la représentation de la grandeur.

Les directions positives des deux autres axes seront connues en les amorçant au point M.

Hosted by Google

SIGNE DES DÉRIVÉES

8. Le signe représenté est celui correspondant aux directions positives représentées au n° **7**.

L'extrémité de la grandeur représentative sera notée p ou n, suivant que la dérivée est positive ou négative.

VARIATION DU SIGNE DES DÉRIVÉES

9. La dérivée $\frac{d^{p+q}z}{dx^p\,dy^q}$ change ou ne change pas de signe avec le changement de direction des axes des x ou des y, suivant que p ou q est impair ou pair.

La dérivée change toujours de signe avec le changement de direction de l'axe des z.

On notera l'extrémité de la grandeur représentative par la lettre x, y ou z, lorsque le signe de la dérivée change avec le changement de sens de l'axe des x, des y ou des z.

10. Il est absolument nécessaire de tenir compte à la fois de ces quatre données de la représentation géométrique des dérivées.

Ainsi, deux dérivées ne sont *égales* que si, représentées par rapport aux mêmes axes de coordonnées, elles ont même valeur absolue, même signe et même mode de variation de signe.

Lorsqu'on devra exécuter une opération quelconque avec les représentations géométriques de dérivées, il faudra d'abord établir leur valeur par rapport à des systèmes d'axes *compatibles*, puis mener les opérations *en tenant compte du signe* des grandeurs.

11. Les diverses dérivées des fonctions représentant une courbe ou une surface étant connues en un point et par rapport à des axes déterminés, on peut en conclure les valeurs des dérivées par rapport à un autre système d'axes quelconques, en *dérivant les formules de transformation d'axes de coordonnées.*

La représentation géométrique complète de toutes les dérivées comportera les deux opérations suivantes :

1° *Déterminer, pour un point donné, un système d'axes spéciaux dépendant de la courbe ; les dérivées prises par rapport à ce système d'axes seront les* ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES *de la courbe au point considéré.*

2° *Établir les formules reliant les valeurs des dérivées générales aux éléments géométriques de la courbe.*

Hosted by Google

CHAPITRE II

Éléments géométriques en un point ordinaire d'une courbe gauche

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DU PREMIER ORDRE. — TANGENTE

12. On passe du système d'axes $Oxyz$ au système $Ox_1y_1z_1$ par les formules de transformation :

$$\begin{aligned} x &= a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 \\ y &= a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 \\ z &= a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1 \end{aligned}$$

a_1, a_2..., c_3 étant des paramètres déterminés par les positions relatives des systèmes d'axes $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$.

En dérivant ces équations *le long de la courbe* et en prenant x_1 comme variable indépendante, on obtient :

$$\frac{dx}{dx_1} = a_1 + b_1\frac{dy_1}{dx_1} + c_1\frac{dz_1}{dx_1},$$

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dx_1} = a_2 + b_2\frac{dy_1}{dx_1} + c_2\frac{dz_1}{dx_1},$$

$$\frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dx_1} = a_3 + b_3\frac{dy_1}{dx_1} + c_3\frac{dz_1}{dx_1}.$$

Un système d'axes particuliers $Ox_1y_1z_1$ peut fournir, en un point A $(x_1y_1z_1)$:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz_1}{dx_1} = 0.$$

Il suffit de prendre pour cela :

$$\frac{dx}{dx_1} = a_1 = \frac{a_2}{\frac{dy}{dx}} = \frac{a_3}{\frac{dz}{dx}}, \qquad (1)$$

ce qui *détermine la direction de l'axe* Ox_1.

Cette direction est celle de la *tangente* de la courbe en A : c'est l'*élément géométrique du premier ordre*.

Sa connaissance détermine par (1) les dérivées du premier ordre par rapport au système d'axes quelconques $Oxyz$; cette propriété est réciproque.

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES ORDRES SUIVANTS

13. On considérera les axes de coordonnées suivants :

L'axe Ox suivant une parallèle à la tangente de la courbe;

Hosted by Google

Les directions positives de Oz et Oy telles qu'un observateur, placé les pieds en O et la tête suivant la direction positive de l'axe Ox, passe de la direction positive de Oz à la direction positive de Oy en faisant un angle de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre ;

Les directions positives Oz_1 et Oy_1 dans le plan zOy et dans les mêmes positions relatives que Oz et Oy, Oz_1 faisant avec Oz un angle θ, compté positivement dans le sens des aiguilles d'une montre, entre les directions positives de Oz_1 et de Oz.

Les formules de transformation sont dans ce cas :

$$\left.\begin{aligned} z &= z_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta, \\ y &= -z_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En dérivant par rapport à x le long de la courbe, on obtient :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz_1}{dx}\cos\theta + \frac{dy_1}{dx}\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dz_1}{dx}\sin\theta + \frac{dy_1}{dx}\cos\theta.$$

En général :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^n z}{dx^n} &= \frac{d^n z_1}{dx^n}\cos\theta + \frac{d^n y_1}{dx^n}\sin\theta\,; \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= -\frac{d^n z_1}{dx^n}\sin\theta + \frac{d^n y_1}{dx^n}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

D'où la relation :

$$\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^2 = \left(\frac{d^n z_1}{dx^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n y_1}{dx^n}\right)^2. \qquad (4)$$

DÉFINITIONS

14. On peut toujours faire :

$$\theta = \theta_n$$

de manière que $$\frac{d^n y_1}{dx^n} = 0.$$

(3) montre qu'il suffit de prendre pour cela :

$$\operatorname{tg}\theta_n = -\frac{\dfrac{d^n y}{dx^n}}{\dfrac{d^n z}{dx^n}}. \qquad (5)$$

Le plan xOz_1 ainsi déterminé s'appelle *plan du $n^{ième}$ ordre* de la courbe en A.

Hosted by Google

On peut poser ensuite :

$$N = \frac{d^n z_1}{dx^n},$$

N est l'*indice géométrique du $n^{ième}$ ordre* de la courbe en A.

L'axe Oz_1 est la *direction géométrique du $n^{ième}$ ordre;* et l'extrémité de la droite représentant N, le *point géométrique du $n^{ième}$ ordre* en A.

Le plan, l'indice, la direction et le point constituent les éléments géométriques du $n^{ième}$ ordre de la courbe.

Leur connaissance détermine les dérivées du $n^{ième}$ ordre par rapport à des axes orthogonaux admettant l'axe des x suivant la tangente, à l'aide de la relation (3) qui devient :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^n z}{dx^n} &= \frac{d^n z_1}{dx^n} \cos\theta_n = N \cos\theta_n, \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= -\frac{d^n z_1}{dx^n} \sin\theta_n = -N \sin\theta_n. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

(4) donne aussi :

$$N^2 = \left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)^2 + \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)^2.$$

CHAPITRE III

Éléments géométriques d'une surface en un de ses points ordinaires

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DU PREMIER ORDRE. — PLAN TANGENT. NORMALE.

15. En passant comme au n° **12**, du système $Oxyz$ au système $Ox_1y_1z_1$, on obtient en dérivant *partiellement* pour la surface les formules de transformation par rapport à x_1 et y_1

$$\left(\frac{dx}{dx_1}\right) = a_1 + c_1\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right),$$

$$\left(\frac{dy}{dx_1}\right) = a_2 + c_2\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dx_1}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx_1}\right) = a_3 + c_3\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right),$$

$$\left(\frac{dx}{dy_1}\right) = b_1 + c_1\left(\frac{dz_1}{dy_1}\right),$$

Hosted by Google

$$\left(\frac{dy}{dy_1}\right) = b_2 + c_2\left(\frac{dz_1}{dy_1}\right),$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy_1}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dy_1}\right) = b_3 + c_3\left(\frac{dz_1}{dy_1}\right).$$

Un système d'axes particuliers $Ox_1y_1z_1$ peut donner en un point A $(x_1y_1z_1)$

$$\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dz_1}{dy_1}\right) = 0.$$

Il suffit de prendre pour cela

$$a_3 = a_1\left(\frac{dz}{dx}\right) + a_2\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

$$b_3 = b_1\left(\frac{dz}{dx}\right) + b_2\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

ce qui correspond à cette conclusion : les axes Ox_1 et Oy_1 sont dans le plan

$$z = \left(\frac{dz}{dx}\right)x + \left(\frac{dz}{dy}\right)y. \qquad (7)$$

Le plan représenté par cette équation est parallèle au *plan tangent* à la surface en A.

L'axe Az_1 normal au plan tangent s'appelle *normale* à la surface en A.

La connaissance du plan tangent détermine par (7) les dérivées partielles $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES ORDRES SUIVANTS

16. On notera

$\alpha_1\ \alpha_2$	(1er ordre),
$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$	(2e ordre),
$\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4$	(3e ordre),
. . . . .	. . . . .
$\mu_1\ \mu_2 \ldots \mu_{n+1}$	(nième ordre),

les dérivées partielles successives de z par rapport à x et y.

Si Oz *est parallèle à la normale à la surface* en A, ces dérivées partielles constituent les éléments géométriques de la surface *par rapport aux directions* Ox *et* Oy.

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DE LA SURFACE EN UN POINT

17. On peut passer des axes Oy, Ox, aux axes Oy', Ox', comme on a fait au n° **13** pour passer de Oz et Oy à Oz_1 et Oy_1 ; Oy' et Oy font l'angle φ.

Hosted by Google

Les formules de transformation sont :

$$\left.\begin{aligned} y &= y' \cos\varphi + x' \sin\varphi, \\ x &= -y' \sin\varphi + x' \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

En dérivant partiellement pour la surface par rapport à x' et y', on obtient

$$\alpha'_1 = \alpha_1 \left(\frac{dx}{dx'}\right) + \alpha_2 \left(\frac{dy}{dx'}\right),$$

$$\alpha'_2 = \alpha_1 \left(\frac{dx}{dy'}\right) + \alpha_2 \left(\frac{dy}{dy'}\right).$$

Puis en dérivant (8)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx'} &= \sin\varphi \qquad & \frac{dy}{dy'} &= \cos\varphi, \\ \frac{dx}{dx'} &= \cos\varphi \qquad & \frac{dx}{dy'} &= -\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Par suite :

$$\alpha'_1 = \alpha_1 \cos\varphi + \alpha_2 \sin\varphi,$$
$$\alpha'_2 = -\alpha_1 \sin\varphi + \alpha_2 \cos\varphi.$$

D'ailleurs α_1 et α_2, α'_1 et α'_2 sont nuls (**15**).

En dérivant à nouveau on obtiendra pour le 2e ordre :

$$\left.\begin{aligned} \beta'_1 &= \beta_1 \cos^2\varphi + 2\beta_2 \cos\varphi \sin\varphi + \beta_3 \sin^2\varphi, \\ \beta'_2 &= \beta_2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (\beta_3 - \beta_1) \cos\varphi \sin\varphi, \\ \beta'_3 &= \beta_1 \sin^2\varphi - 2\beta_2 \sin\varphi \cos\varphi + \beta_3 \cos^2\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma'_1 &= \gamma_1 \cos^3\varphi + 3\gamma_2 \cos^2\varphi \sin\varphi + 3\gamma_3 \cos\varphi \sin^2\varphi + \gamma_4 \sin^3\varphi, \\ \gamma'_2 &= -\gamma_1 \cos^2\varphi \sin\varphi + \gamma_2 (\cos^3\varphi - 2\cos\varphi \sin^2\varphi) \\ &\qquad - \gamma_3 (\sin^3\varphi - 2\cos^2\varphi \sin\varphi) + \gamma_4 \sin^2\varphi \cos\varphi, \\ \gamma'_3 &= \gamma_1 \sin^2\varphi \cos\varphi + \gamma_2 (\sin^3\varphi - 2\sin\varphi \cos^2\varphi) \\ &\qquad + \gamma_3 (\cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi \cos\varphi) + \gamma_4 \cos^2\varphi \sin\varphi, \\ \gamma'_4 &= -\gamma_1 \sin^3\varphi + 3\gamma_2 \sin^2\varphi \cos\varphi - 3\gamma_3 \sin\varphi \cos^2\varphi + \gamma_4 \cos^3\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

FORMULES GÉNÉRALES POUR LE NIÈME ORDRE

18. La première dérivée partielle se présente sous la forme :

$$\mu'_1 = [\mu \cos\varphi + \mu \sin\varphi]^n$$

le second membre étant conventionnellement développé suivant la loi du binôme.

$$\mu'_1 = \mu_1 \cos^n\varphi + n\mu_2 \cos^{n-1}\varphi \sin\varphi + \frac{n(n-1)}{1,\ 2} \mu_3 \cos^{n-2}\varphi \sin^2\varphi + \ldots \qquad (12)$$

Pour obtenir les autres dérivées, on trouvera, en partant de

Hosted by Google

la loi de formation des dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre, à l'aide des dérivées de l'ordre $(n-1)$:

$$\mu'_1 = \frac{d(\mu-1)'_1}{dx'} = \left[\frac{d(\mu-1)_1}{dx}\cos^{n-1}\varphi + (n-1)\frac{d(\mu-1)_2}{dx}\cos^{n-2}\varphi\sin\varphi + \ldots\right]\frac{dx}{dx'} + \left[\text{idem en } y\right]\frac{dy}{dx'}$$

$$\mu'_2 = \frac{d(\mu-1)'_1}{dy'} = \left[\qquad\qquad \text{idem} \qquad\qquad\right]\frac{dx}{dy'} + \left[\text{idem en } y\right]\frac{dy}{dy'}$$

$\frac{dx}{dx'}$ et $\frac{dx}{dy'}$ étant alors remplacés en fonction de φ à l'aide de (9), on obtiendra identiquement, en dérivant fictivement μ'_1 par rapport à φ

$$\frac{d\mu'_1}{d\varphi} = n\mu'_2.$$

Puis de la même manière :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\mu'_2}{d\varphi} &= (n-1)\,\mu'_3 - \mu'_1,\\
\frac{d\mu'_3}{d\varphi} &= (n-2)\,\mu'_4 - 2\mu'_2,\\
&\vdots\\
\frac{d\mu'_k}{d\varphi} &= (n-k+1)\,\mu'_{k+1} - (k-1)\,\mu'_{k-1},\\
&\vdots\\
\frac{d\mu'_n}{d\varphi} &= \mu'_{n+1} - (n-1)\,\mu'_{n-1},\\
\frac{d\mu'_{n+1}}{d\varphi} &= -n\mu'_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

L'établissement de ces valeurs se simplifie encore si on remarque que l'on passe de μ'_k à μ'_{n+2-k} en changeant

$$\varphi \text{ en } 90^\circ + \varphi,$$

soit $\qquad \cos\varphi$ en $-\sin\varphi$ et $\sin\varphi$ en $\cos\varphi$.

COURBES INDICATRICES

19. Les relations établies au n° **18** permettent de construire les divers éléments μ'_k pour un angle φ donné, lorsqu'on connaît la valeur de ces éléments pour un système d'axes Ox, Oy.

On peut porter la grandeur μ'_k sur l'axe Ox' ; en faisant varier l'angle φ, l'extrémité de cette grandeur décrit un lieu qui est appelé indicatrice de l'élément μ'_k, et dont l'équation est donnée par l'une des relations (13).

Hosted by Google

20. Pour préciser, on peut construire l'indicatrice de l'élément μ'_1.

Si l'on remplace dans (12) les éléments $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{n+1}$ par leurs valeurs en *tenant compte des signes*, la valeur absolue de μ'_1 sera donnée par le deuxième membre de cette relation affecté du signe plus ou du signe moins.

Pour construire l'indicatrice, il suffira de construire, suivant les conventions ordinaires, les branches de courbes *réelles*, à rayons vecteurs *positifs*, des deux équations

$$\mu'_1 = + \{ \mu_1 \cos^n \varphi + \ldots\ldots \}$$

et

$$\mu'_1 = - \{ \mu_1 \cos^n \varphi + \ldots\ldots \}$$

puis de noter (p) les points correspondant à la première équation et (n) ceux correspondant à l'autre.

On peut voir facilement que l'on respecte ainsi les conventions qui ont été posées pour la représentation des dérivées.

Il n'y aura qu'un seul point sur une direction φ : en effet, les deux équations n'offrent, en réalité, pour une valeur de φ, qu'une solution pour μ'_1; car, les deux valeurs obtenues étant égales et de signes contraires, une seule convient, la positive.

On arrivera ainsi à considérer autour de l'origine une série de branches de courbes, notées (p) et (n) et comprises dans des directions angulaires données par les racines réelles en φ de

$$\mu'_1 = 0. \qquad (15)$$

L'élément géométrique est nul pour ces directions.

Des secteurs renfermant des parties de courbes positives et négatives alterneront autour de l'origine, à moins que (15) ne renferme une racine multiple d'ordre pair en φ.

21. Si l'on change φ en $(90^\circ + \varphi)$ dans μ'_k, on obtient μ'_{n+2-k}; on obtiendra donc μ'_{n+2-k} par l'intersection de l'axe Oy' correspondant à l'angle φ, avec l'indicatrice de μ'_k.

22. Il existe donc, en réalité, $\frac{n+1}{2}$ ou $\frac{n}{2} + 1$ indicatrices pour les éléments géométriques du $n^{\text{ième}}$ ordre (21).

En fait, la connaissance de l'indicatrice de μ_1 détermine les divers éléments géométriques de la surface; elle nécessite, en effet, la connaissance des éléments correspondant à un système d'axes Ox, Oy (12), et, par suite, on peut obtenir tous les autres (n° **18**).

L'indicatrice de μ_1 est appelée *indicatrice principale*.

Hosted by Google

23. On aurait pu simplifier les équations des courbes indicatrices en représentant des quantités auxiliaires m'_k, toujours positives, données par la relation

$$(m'_k)^n \times \mu'_k = \pm 1$$

le signe du second membre dépendant de celui de μ'_k.

On arriverait ainsi, pour le 2e ordre, à l'indicatrice simplifiée

$$\pm 1 = \beta_1 x^2 + 2\beta_2 xy + \beta_3 y^2 \text{ (indicatrice de Dupin),}$$

qui a le grand avantage d'être une courbe du 2e degré.

Seulement cet artifice, introduit aux ordres suivants, nécessite la résolution d'équations d'ordre supérieur lorsqu'on veut obtenir un point de l'indicatrice correspondant à une valeur de φ. Il complique donc inutilement la représentation, au lieu de la simplifier.

CHAPITRE IV

Relations entre les éléments géométriques d'une surface et des lignes tracées sur celle-ci

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DU PREMIER ORDRE

23. Pour une courbe quelconque de la surface on obtient par dérivation au point A :

$$\frac{dz}{dx} = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{dy}{dx}.$$

En tenant compte de (1) et de (7), cette relation prouve que *la tangente à la courbe se trouve dans le plan tangent à la surface.*

ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES ORDRES SUIVANTS

24. Le *plan tangent en* A *étant parallèle au plan* yOx, on obtient en ce point pour une courbe de la surface :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \alpha_1 + \alpha_2 \frac{dy}{dx}, \\
\frac{d^2z}{dx^2} &= \beta_1 + 2\beta_3 \frac{dy}{dx} + \beta_3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \alpha_2 \frac{d^2y}{dx^2}, \\
\frac{d^3z}{dx^3} &= \gamma_1 + 3\gamma_2 \frac{dy}{dx} + 3\gamma_3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \gamma_4 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\left(\beta_2 + \beta_3 \frac{dy}{dx}\right) \frac{d^2y}{dx^2} \\
&\qquad + \alpha_2 \frac{d^3y}{dx^3},
\end{aligned}\right\} (16)$$

etc.

Hosted by Google

Si on considère la série de courbes admettant la *tangente suivant* Ox, ces relations deviennent :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dx^2} &= \beta_1, \\
\frac{d^3z}{dx^3} &= \gamma_1 + 3\beta_2 \frac{d^2y}{dx^2}, \\
\frac{d^4z}{dx^4} &= \delta_1 + 6\gamma_2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4\beta_2 \frac{d^3y}{dx^3} + 3\beta_3 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2, \\
\frac{d^5z}{dx^5} &= \varepsilon_1 + 10\delta_2 \frac{d^2y}{dx^2} + 10\gamma_2 \frac{d^3y}{dx^3} + 5\beta_2 \frac{d^4y}{dx^4} + 15\gamma_3 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \\
&\qquad + 10\beta_3 \frac{d^2y}{dx^2} \times \frac{d^3y}{dx^3},
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

etc.

A l'aide des relations (6) on pourrait encore remplacer les diverses dérivées en fonction des éléments N et θ_n.

25. Les relations (17) montrent que les indices des divers ordres de la section plane, normale à la surface $\left(\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = \ldots\ldots = 0\right)$ ne sont autres que les éléments géométriques correspondant aux rayons vecteurs menés suivant Ox, des indicatrices principales de la surface.

26. Lieu des points géométriques du $n^{\text{ième}}$ ordre des courbes de la surface ayant mêmes éléments géométriques des $(n-1)$ premiers ordres en A.

(17) montre encore que pour toutes ces courbes on a

$$\frac{d^nz}{dx^n} = \text{constante},$$

car la valeur de cet élément y est fonction des dérivées des $(n-1)$ premiers ordres.

On conclut alors de (6), ainsi que des conventions sur la représentation des dérivées, que le lieu du point géométrique est constitué par *deux droites, perpendiculaires au plan normal à la surface mené par la tangente commune aux courbes et symétriques par rapport au point* A.

Les points de l'une des droites sont notés (p) et les points de l'autre (n).

Hosted by Google

CHAPITRE V

Application à la définition du contact des surfaces et des courbes

a) CONTACT DE SURFACES EN UN POINT COMMUN A

27. Les surfaces sont *sécantes* au point A, lorsque les deux plans tangents aux surfaces y sont différents.

Les surfaces présentent un *contact du $n^{ième}$ ordre* au point A, lorsque les plans tangents y sont confondus ainsi que les indicatrices principales des n premiers ordres.

b) CONTACT D'UNE SURFACE ET D'UNE COURBE EN UN POINT COMMUN A

La surface et la courbe sont *sécantes* au point A, lorsque la tangente à la courbe n'est pas dans le plan tangent à la surface.

La surface et la courbe présentent un *contact du $n^{ième}$ ordre* au point A, lorsque la tangente à la courbe se trouve dans le plan tangent à la surface, et que les courbes de la surface ayant les plans des n premiers ordres de la courbe, ont aussi les indices des n premiers ordres de celle-ci.

c) CONTACT DE COURBES EN UN POINT COMMUN A

Les courbes sont *sécantes* au point A, lorsque les tangentes n'y sont pas confondues.

Les courbes présentent un *contact du $n^{ième}$ ordre* au point A, lorsque les tangentes aux courbes y sont confondues et que les éléments géométriques des n premiers ordres y sont identiques chacun à chacun.

28. D'après la relation (12), pour qu'un contact du $n^{ième}$ ordre soit réalisé entre deux surfaces, il suffit que les éléments géométriques des surfaces soient confondus pour *un seul système d'axes* zOyx.

On peut même aller plus loin et démontrer que ce même contact existe lorsque les dérivées partielles jusqu'au $n^{ième}$ ordre sont égales chacune à chacune pour *un système d'axes* $z'Ox'y'$ *absolument quelconques*.

Les formules de transformation sont :

$$z' = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$x' = a_3x + b_3y + c_3z.$$

Hosted by Google

En dérivant partiellement pour chacune des surfaces par rapport à x', on trouve :

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_1 &= (a_1 + c_1\alpha_1)\frac{dx}{dx'} + (b_1 + c_1\alpha_2)\frac{dy}{dx'}, \\ 0 &= (a_2 + c_2\alpha_1)\frac{dx}{dx'} + (b_2 + c_2\alpha_2)\frac{dy}{dx'}, \\ 1 &= (a_3 + c_3\alpha_1)\frac{dx}{dx'} + (b_3 + c_3\alpha_2)\frac{dy}{dx'}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Les surfaces ayant un contact du premier ordre, les éléments α_1 et α_2 sont égaux dans les deux surfaces.

(18) montre qu'il en est alors de même de α'_1, $\frac{dx}{dx'}$ et $\frac{dy}{dx'}$.

En dérivant par rapport à y', on conclurait de même à l'identité de la dérivée α'_2 ; les résultats sont d'ailleurs réciproques, car on peut interchanger les indices $'$ (*prime*) entre les lettres analogues des équations.

En dérivant à nouveau les équations (18) on trouve :

$$\beta'_1 = (a_1 + c_1\alpha_1)\frac{d^2x}{dx'^2} + (b_1 + c_1\alpha_2)\frac{d^2y}{dx'^2} + c_1\beta_1\frac{dx}{dx'} + c_1\beta_2\frac{dy}{dx'},$$

$$0 = (a_2 + c_2\alpha_1)\frac{d^2x}{dx'^2} + (b_2 + c_2\alpha_2)\frac{d^2y}{dx'^2} + c_2\beta_1\frac{dx}{dx'} + c_2\beta_2\frac{dy}{dy'},$$

$$0 = (a_3 + c_3\alpha_1)\frac{d^2x}{dx'^2} + (b_3 + c_3\alpha_2)\frac{d^2y}{dx'^2} + c_3\beta_1\frac{dx}{dx'} + c_3\beta_2\frac{dy}{dy'}.$$

Si en plus de α_1 et α_2, β_1 et β_2 sont égaux chacun à chacun dans les deux équations, il en sera de même de

$$\beta'_1\frac{d^2x}{dx'^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx'^2}.$$

Cette démonstration pourrait se continuer ainsi jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre.

CHAPITRE VI

Relations entre les éléments géométriques d'une courbe commune à deux surfaces et les éléments géométriques de celles-ci

CAS DE DEUX SURFACES SÉCANTES AU POINT COMMUN A

29. *1er ordre.* — La tangente se trouve à l'intersection des deux plans tangents (n° **23**).

Ordres suivants. — La courbe appartenant aux deux surfaces,

Hosted by Google

le point du $n^{\text{ième}}$ ordre, se trouve à l'intersection des deux lieux linéaires des points du $n^{\text{ième}}$ ordre des courbes des surfaces ayant mêmes éléments des $(n - 1)$ premiers ordres (n° **26**).

CAS DE DEUX SURFACES AYANT UN CONTACT DU PREMIER ORDRE

30. *1er ordre.* — Les plans tangents des surfaces sont confondus ; la tangente à la courbe d'intersection n'est donc pas déterminée par la connaissance des éléments géométriques du premier ordre communs aux deux surfaces. Il faut recourir au 2e ordre.

Soit Ox' la direction inconnue de la tangente cherchée.

Les lieux linéaires des points du 2e ordre correspondant dans les deux surfaces à cette direction de tangente doivent être confondus, puisqu'ils sont parallèles (n° **26**) et qu'ils doivent présenter un point commun pour l'indice de la courbe commune. Les sections normales menées suivant Ox ont donc même indice du 2e ordre ; d'après le n° **25**, il en est alors de même des éléments β'_1 des deux surfaces, ce qui conduit, d'après le développement (12), à la relation

$$(s_1\beta_1 - s_2\beta_1)\cos^2\varphi + 2(s_1\beta_2 - s_2\beta_2)\cos\varphi\sin\varphi + (s_1\beta_3 - s_2\beta_3)\sin^2\varphi = 0. \quad (19)$$

Deux valeurs de φ correspondent à Ox' ; il y a donc au point A deux courbes communes aux deux surfaces, dont on vient de déterminer les tangentes.

On peut remarquer que ces tangentes correspondent aux rayons vecteurs communs des indicatrices principales du 2e ordre (n° **22**).

31. *Ordres suivants.* — En mettant Ox suivant une des tangentes à la courbe, et en raisonnant comme au n° **30** pour la comparaison des lieux linéaires des points du 3e ordre des courbes des surfaces ayant un contact du 2e ordre (n° **27**) avec la courbe commune (n° **26** et relation [17]), on trouve

$$(s_1\gamma_1 - s_2\gamma_1) + 3(s_1\beta_2 - s_2\beta_2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \qquad (20)$$

D'où la détermination de $\frac{d^2y}{dx^2}$, et, par suite, celle des éléments géométriques du 2e ordre de la courbe (6) (17).

32. Dans le cas où (19) aurait eu des racines égales en φ, on aurait obtenu (n° **31**) :

$$s_1\beta_1 = s_2\beta_1$$

et

$$s_1\beta_2 = s_2\beta_2$$

Hosted by Google

et (20) aurait alors exigé :

$$s_1\gamma_1 = s_2\gamma_1.$$

En recourant alors au 4e ordre, on aurait trouvé comme précédemment :

$$(s_1\delta_1 - s_2\delta_1) + 6\,(s_1\gamma_2 - s_2\gamma_2)\frac{d^2y}{dx^2} + 3\,(s_1\beta_3 - s_2\beta_3)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

qui détermine deux valeurs pour $\frac{d^2y}{dx^2}$ correspondant aux deux courbes de contact, lesquelles ont ici elles-mêmes un contact du premier ordre.

CAS DE DEUX SURFACES AYANT UN CONTACT DU K^IÈME ORDRE

33. La marche générale des opérations est tout indiquée par le cas précédent :

Si les surfaces ont un contact du $k^{\text{ième}}$ ordre, les tangentes aux courbes communes seront données par une équation analogue à (19), écrite à l'aide de (12), entre les éléments géométriques du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre.

Les $(k+1)$ racines de cette équation en φ correspondront aux points de rencontre des indicatrices principales du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre dans les deux surfaces.

Les éléments du 2e ordre des courbes seront obtenus en égalant les valeurs de $\frac{d^{k+2}z}{dx^{k+2}}$ pour les deux surfaces dans les relations (17). On verra que les termes renfermant une dérivée supérieure à $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont multipliés par un élément géométrique de surface inférieur à l'ordre $k+1$, donc le même pour les deux surfaces; ces termes disparaissent donc. Il restera une équation déterminant $\frac{d^2y}{dx^2}$.

On devra recourir à des éléments de surface de l'ordre $(n+k)$ pour déterminer les éléments géométriques de l'ordre n des courbes.

Hosted by Google

CHAPITRE VII

Relations entre les éléments géométriques et les dérivées générales en un point d'une courbe

34. Voici la marche des opérations :

Étant donnés le système d'axes quelconques $zOxy$ et les dérivées de z par rapport à x et y, on déterminera les éléments géométriques des projections de la courbe sur les plans de coordonnées zOx et zOy, puis on déterminera à l'aide de ceux-ci les éléments de la courbe elle-même.

La première partie du problème revient donc à exprimer les relations reliant les dérivées générales d'une courbe plane (projection de la courbe), prises par rapport à des axes quelconques du plan, aux éléments géométriques de la courbe.

La seconde partie consistera à déterminer les éléments de la courbe d'intersection des deux cylindres droits ayant les projections comme sections droites.

PREMIÈRE PARTIE

35. Soient une courbe plane rapportée aux axes zOy de son plan, puis des axes $z'Oy'$ reliés à zOy comme il est dit au n° **13**, et tels que Oy' *soit confondu avec la tangente* à la courbe.

Les formules de transformation sont :

$$z = z' \cos\theta + y' \sin\theta,$$
$$y = -z' \sin\theta + y' \cos\theta.$$

On obtient par dérivation le long de la courbe, par rapport à y'

$$\frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dy'} = \frac{dz'}{dy'} \cos\theta + \sin\theta,$$
$$\frac{dy}{dy'} = -\frac{dz'}{dy'} \sin\theta + \cos\theta.$$

Mais $\frac{dz'}{dy'} = 0$ (n° **12**),

d'où $$\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg}\theta$$

et $$\frac{dy}{dy'} = \cos\theta.$$

La *dérivée* $\frac{dz}{dy}$ *n'est autre que la tangente de l'angle fait par la*

Hosted by Google

tangente à la courbe avec l'axe Oy, cet angle étant compté dans le sens indiqué au n° **13.**

En dérivant à nouveau, on obtient pour le *2e ordre*

$$\frac{d^2z}{dy^2}\cos^3\theta = \frac{d^2z'}{dy'^2} \text{ (*)},$$

puis pour le *3e ordre :*

$$\frac{d^3z}{dy^3}\cos^4\theta = 3\left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right)^2 \operatorname{tg}\theta + \frac{d^3z'}{dy'^3},$$

ou bien :

$$\frac{d^3z}{dy^3}\cos^4\theta - 3\frac{d^2z}{dy^2}\cos^5\theta\sin\theta = \frac{d^3z'}{dy'^3},$$

pour le *4e ordre :*

$$\frac{d^4z}{dy^4}\cos^5\theta = 10\frac{d^3z'}{dy'^3}\times\frac{d^2z'}{dy'^2}\operatorname{tg}\theta + 15\left(\frac{d^2z'}{dy'^2}\right)^3\operatorname{tg}^2\theta + \frac{d^4z'}{dy'^4},$$

ou bien :

$$\frac{d^4z}{dy^4}\cos^5\theta - 10\frac{d^3z}{dy^3}\times\frac{d^2z}{dy^2}\cos^6\theta\sin\theta + 15\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)^3\cos^7\theta\sin^2\theta = \frac{d^4z'}{dy'^4}.$$

Et l'on pourrait pousser plus loin jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre.

DEUXIÈME PARTIE

36. D'après le chapitre VI, le problème est actuellement résolu, si l'on connaît les éléments géométriques des cylindres projetants.

Or, ceux-ci sont connus; si on prend un système d'axes tels que Ox soit parallèle à la tangente à la section droite et Oy parallèle à la génératrice du cylindre, d'après le n° **25**, les indices successifs de la section droite constituent les éléments β_1, γ_1... μ_1 de la surface, et tous les autres éléments sont nuls, car l'équation de la surface peut s'écrire :

$$z = f(x)$$

et les dérivées partielles prises par rapport à y sont nulles.

(*) Ce qui revient à la forme connue du rayon de courbure

$$\frac{1}{\frac{d^2z'}{dy'^2}} = \frac{\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dy^2}}.$$

Hosted by Google

CHAPITRE VIII

Relations entre les éléments géométriques et les dérivées partielles générales en un point d'une surface

37. On peut d'abord passer du système d'axes quelconque $zOxy$ au système d'axes $zOx'y'$, Oy' et Ox' étant reliés à Oy et Ox comme au n° **17**, Ox' *étant à l'intersection du plan tangent à la* surface *avec* yOx.

En recherchant alors les dérivées partielles, on retombe sur la dérivation dans le changement d'axes du n° **17**, sauf en ce que les dérivées α du premier ordre ne sont pas nulles.

Les dérivées partielles par rapport à $zOx'y'$ peuvent donc se construire à l'aide des dérivées prises par rapport à $zOxy$.

En effet, Ox' se trouvant dans le plan tangent on a, d'après le n° **15**,

$$\alpha'_1 = 0,$$

ou bien : $$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ (voir n° 17).}$$

(10), (11)... permettent alors de construire avec la règle et le compas les éléments α'_2 β' γ'...

38. On peut maintenant passer de $x'Ozy'$ à $x'Oz''y''$, Oz'' et Oy'' étant reliés à Oz et Oy', comme au n° **13**, Oz_1 et Oy_1 le sont à Oz et Oy, et Oy'' *étant dans le plan tangent à la surface* qui est donc parallèle à $x'Oy''$.

Les formules de transformation sont donc :

$$z = z'' \cos\theta + y'' \sin\theta,$$
$$y' = -z'' \sin\theta + y'' \cos\theta.$$

Elles donnent par dérivation partielle par rapport à x' et y'' :

Pour le *1er ordre :*

$$\alpha''_1 = 0, \qquad \alpha''_2 = 0, \qquad \alpha'_2 = \operatorname{tg}\theta,$$

puisque $x'Oy''$ est parallèle au plan tangent.

Pour les *ordres suivants :*

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta\, \beta'_1 &= \beta''_1 \\ \cos^2\theta\, \beta'_2 &= \beta''_2 \\ \cos^3\theta\, \beta'_3 &= \beta''_3 \end{aligned}\right\} \text{2e ordre ;}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta\, \gamma'_1 &= \gamma''_1 + 3\beta''_1 \beta''_2 \operatorname{tg}\theta \\ \cos^2\theta\, \gamma'_2 &= \gamma''_2 + (2\beta''^2_2 + \beta''_1 \beta''_3) \operatorname{tg}\theta \\ \cos^3\theta\, \gamma'_3 &= \gamma''_3 + 3\beta''_2 \beta''_3 \operatorname{tg}\theta \\ \cos^4\theta\, \gamma'_4 &= \gamma''_4 + 3\beta''^2_3 \operatorname{tg}\theta \end{aligned}\right\} \text{3e ordre}$$

Hosted by Google

ou bien :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta\,\gamma'_1 - 3\cos^2\theta\sin\theta\,\beta'_1\,\beta'_2 = \gamma''_1\\ \cos^2\theta\,\gamma'_2 - (2\beta'^2_2 + \beta'_1\,\beta'_3)\cos^3\theta\sin\theta = \gamma''_2\\ \cos^3\theta\,\gamma'_3 - 3\cos^4\theta\sin\theta\,\beta'_2\,\beta'_3 = \gamma''_3\\ \cos^4\theta\,\gamma'_4 - 3\cos^5\theta\sin\theta\,\beta'^2_3 = \gamma''_4\end{array}\right\}\ 3^e \text{ ordre.}$$

CHAPITRE IX

Détermination pratique des éléments géométriques de surfaces dans certains cas particuliers et examen de quelques catégories de surfaces connues

39. Si l'on possède l'*équation de la surface*, on peut donc déterminer les diverses dérivées partielles, puis trouver les éléments géométriques en un point, en se servant des relations trouvées au chapitre VIII.

Mais il arrive très souvent, particulièrement en *géométrie descriptive*, qu'une surface est déterminée par son *mode de génération*, et que la recherche de l'équation de la surface, à l'aide de ces éléments déterminants, offrirait des difficultés.

On pourra quelquefois simplifier les opérations en utilisant le procédé suivant :

1° *Déterminer les éléments géométriques des directrices et des génératrices passant par le point*, en se servant au besoin des données du chapitre VII pour arriver à ce résultat ;

2° *En tirer des relations entre les éléments géométriques de la surface* à l'aide des résultats du chapitre IV, transformés au besoin par les relations du n° **18**.

On peut remarquer que toutes les relations ainsi utilisées sont linéaires par rapport aux inconnues.

40. Il existe aussi des catégories de surfaces dont on connaît les *équations aux dérivées partielles*, et qui fournissent ainsi directement une série de relations entre les éléments géométriques en un point.

Les diverses équations de surfaces dont il va être fait usage sont tirées du *Cours de calcul infinitésimal* de J. Houël (t. III, p. 156) :

1° *Surfaces cylindriques* (voir n° **36**).

Axes : Oz, parallèle à la normale au point A ;

Hosted by Google

Ox, parallèle à la génératrice du point A.
Équation : $z = f(y)$.
Relations : Tous les éléments géométriques nuls sauf μ_{n+1}.

2° *Surfaces coniques.*
Axes : L'origine des axes au sommet du cône ;
Oz, parallèle à la normale en A ;
Ox, suivant la génératrice de A ;
d, distance AO.

Equation : $z = \alpha_1 x + \alpha_2 y$.

Relations en A : $y = 0$; $z = 0$;

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$
$$\beta_1 = 0; \quad \beta_2 = 0;$$
$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = 0; \quad \beta_3 + \gamma_3 \,.\, d = 0;$$
$$\delta_1 = 0; \quad \delta_2 = 0; \quad 2\gamma_3 + \delta_3 \,.\, d = 0; \quad 2\gamma_4 + \delta_4 \,.\, d = 0.$$

En général :

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_2 = 0; \quad (n-2)(\mu-1)_3 + \mu_3 \times d = 0; \ldots.$$
$$\ldots\ldots (n-2)(\mu-1)_n + \mu_n \times d = 0.$$

3° *Surfaces conoïdes.*
Axes : Droite directrice passant par l'origine ;
Oz, parallèle à la normale en A ;
Ox, suivant le génératrice de A ;
d, distance AO.
Equations : De la directrice :

$$x = Az; \quad y = Bz.$$

Du plan directeur :

$$my + nz = 0.$$

De la surface conoïde :

$$\alpha_1 \left[m(Ay - Bx) + n(x - Az)\right] + \alpha_2 n(y - Bz) = m(y - Bz).$$

Relations : $y = 0$; $z = 0$;

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$
$$\beta_1 = 0; \quad \beta_2(-mB + n)\,d = m;$$
$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = 0; \quad 2\beta_2 mA + \beta_3(mB + 2n) + \gamma_3(-mB + n)\,d = 0.$$

4° *Surfaces de révolution.*
Axes : Origine au point de rencontre de la tangente à la méridienne en A et de l'axe de révolution :
Oz, parallèle à la normale en A ;
Oy, suivant la tangente à la méridienne en A ;
d, distance OA.

Hosted by Google

Equations : De l'axe de révolution :

$$x = 0; \quad y = Bz;$$

De la surface :

$$\alpha_1 (y - Bz) - \alpha_2 x = Bx.$$

Relations :

$$x = 0; \quad z = 0;$$
$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$
$$\beta_1 \times d = B; \quad \beta_2 = 0;$$
$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 \times d = \beta_3 - \beta_1; \quad \gamma_3 = 0.$$

5° *Surfaces réglées à plan directeur.*
Axes : Oz, parallèle à la normale en A ;
Ox, suivant la génératrice.
Equations : Du plan directeur :

$$By + Cz = 0;$$

De la surface :

$$(B + C\alpha_2)^2 \beta_1 - 2C (B + C\alpha_2) \alpha_1\beta_2 + C^2\alpha^2_1\beta_3 = 0.$$

Relations :

$$y = 0; \quad z = 0;$$
$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$
$$\beta_1 = 0.$$
$$\gamma_1 = 0; \quad B\gamma_2 = 2C\beta^2_2.$$

6° *Surfaces réglées à droite directrice.*
Axes : Directrice passant par l'origine ;
Oz, parallèle à la normale en A ;
Ox, suivant la génératrice en A ;
d, distance OA.
Equations : De la directrice :

$$x = Az; \quad y = Bz.$$

De la surface :

$$Q^2\beta_1 - 2PQ\beta_2 + P^2\beta_3 = 0;$$
$$P = (Ay - Bx)\alpha_1 - (y - Bz);$$
$$Q = (Ay - Bx)\alpha_2 + (x - Az).$$

Relations :

$$y = 0; \quad z = 0;$$
$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$
$$\beta_1 = 0;$$
$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 d + 2B\beta^2_2 d + 2\beta_2 = 0.$$

7° *Surfaces développables.*
Axes : Oz, parallèle à la normale à la surface ;
Ox, suivant la génératrice.

Hosted by Google

Equation : $\beta_1\beta_3 = \beta^2_2$.

Relations :

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0;$$
$$\beta_1 = 0; \quad \beta_2 = 0;$$
$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = 0;$$
$$\delta_1 = 0; \quad \delta_2 = 0; \quad 2\gamma^2_3 = \beta_3\delta_3.$$

8° *Surfaces réglées.*

Axes : Oz, parallèle à la normale ou à la surface en A ;
Ox, suivant la génératrice.

Equations :

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 2\beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & 3\gamma_2 & 3\gamma_3 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 3\gamma_2 & 3\gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Relations :

$$\alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = 0; \quad \gamma_1 = 0; \ldots \quad \mu_1 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & 2\beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 2\beta_2 & \beta_3 \\ \delta_2 & 3\gamma_2 & 3\gamma_3 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 3\gamma_2 & 3\gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0.$$

CHAPITRE X

Des surfaces de raccordement le long de la génératrice d'une surface réglée

41. Il a été indiqué au n° **39** un moyen très pratique et qui peut être utilisé très souvent en géométrie descriptive, de construire les éléments géométriques d'une surface déterminée par son mode de génération.

En général, ce moyen ne réussit complètement qu'aux points d'appui de la ligne génératrice sur les éléments directeurs ; il offre des lacunes en un point quelconque de la génératrice, où les relations obtenues sont insuffisantes.

On a alors imaginé de construire, le long de la génératrice, des surfaces plus simples, offrant un contact d'un ordre déter-

Hosted by Google

miné avec la surface étudiée, et dont il est possible, par des constructions simples, d'obtenir les éléments géométriques; ceux-ci conviennent donc aussi, jusqu'à un certain ordre, à la surface primitivement envisagée.

On traitera dans ce chapitre le cas d'une surface réglée, dont on veut construire les éléments géométriques des premier et deuxième ordres.

42. A cet effet, voici d'abord la démonstration d'un premier théorème, d'ailleurs bien connu.

Deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune ont un contact du premier ordre le long de cette génératrice, lorsqu'elles ont même plan tangent en trois points de celle-ci.

La génératrice étant confondue avec l'axe Ox, soient

$$z = ax + b \qquad z = a_1x + b_1$$
$$y = cx + d \qquad y = c_1x + d_1$$

les équations des deux surfaces.

$abcd$ sont des fonctions d'un paramètre t.

$a_1b_1c_1d_1$ sont des fonctions d'un paramètre t_1.

En calculant les dérivées α, on trouve :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 - a &= (a'x + b')\frac{dt}{dx} & \alpha_2 &= (a'x + b')\frac{dt}{dy} \\ -c &= (c'x + d')\frac{dt}{dx} & 1 &= (c'x + d')\frac{dt}{dy} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

D'où, pour la génératrice commune : $(a = b = c = d = 0)$

$$\alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = \frac{a'x + b'}{c'x + d'}. \qquad (22)$$

Pour que les deux surfaces aient un contact du premier ordre, il suffit, d'après le n° **28**, que les éléments α soient partout confondus, ce qui conduit à la condition

$$\frac{a'x + b'}{c'x + d'} = \frac{a'_1x + b'_1}{c'_1x + d'_1}.$$

Si cette dernière relation doit être satisfaite pour trois valeurs distinctes de x, elle doit nécessairement se résoudre en identités indépendantes de x. C. Q. F. D.

Ces identités sont :

$$\frac{a'}{a'_1} = \frac{b'}{b'_1} = \frac{c'}{c'_1} = \frac{d'}{d'_1}. \qquad (23)$$

43. De la même manière, on peut démontrer que :

Deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune ont un

Hosted by Google

contact du deuxième ordre le long de cette génératrice, lorsqu'elles ont contact du deuxième ordre en trois points de celle-ci.

De l'égalité des éléments α on trouve, par dérivation le long de la génératrice $\left(\frac{dy}{dx} = 0\right)$, qu'il en est de même des éléments β_1 et β_2. Il suffit donc de démontrer l'identité des éléments β_3 pour prouver l'existence du contact du deuxième ordre (n° **28**).

En dérivant (22) en y, on obtient :

$$\beta_3 (c'x + d') + \alpha_2 (c''x + d'') \frac{dt}{dy} = (a''x + b'') \frac{dt}{dy}$$

et en remplaçant $\frac{dt}{dy}$ par sa valeur tirée de la quatrième équation (21) :

$$\beta_3 (c'x + d')^2 = (a''x + b'') - \alpha_2 (c''x + d''),$$

puis en se servant de (22) :

$$\beta_3 (c'x + d')^3 = (a''x + b'') (c'x + d') - (c''x + d'') (a'x + b').$$

Nous obtenons ainsi l'équation de condition entre les deux surfaces :

$$\left(\frac{c'x + d'}{c'_1x + d'_1}\right)^3 = \frac{(a''x + b'') (c'x + d') - (c''x + d'') (a'x + b')}{(a''_1x + b''_1)(c'_1x + d'_1) - (c''_1x + d''_1)(a'_1x + b'_1)}.$$

D'après (23), le premier membre de cette égalité se réduit à une constante; la condition devient donc une équation du deuxième degré en x, qui doit se réduire en identités si elle est satisfaite pour plus de deux valeurs de x.

44. Il existe une surface réglée simple, dont on peut construire aisément les éléments géométriques des deux premiers ordres en un point quelconque; c'est l'*hyperboloïde du deuxième degré.*

Il y a lieu de voir jusqu'à quel point il est possible d'identifier les éléments géométriques de l'hyperboloïde avec ceux d'une surface réglée quelconque.

PREMIER ORDRE

45. D'après le n° **42**, si l'on prend trois droites directrices, situées dans les plans tangents, et s'appuyant aux trois points de contact sur la génératrice de la surface, on constitue les éléments déterminants d'un hyperboloïde ayant contact du premier ordre avec la surface réglée.

Voici le développement analytique de ce résultat :

La génératrice étant placée suivant Ox, l'équation générale

Hosted by Google

des surfaces du deuxième ordre contenant cette génératrice est :

$$ay^2 + 2byz + cz^2 + 2dxy + 2xz + 2hy + 2kz = 0. \quad (25)$$

Elle fournit par dérivation :

$$\left.\begin{array}{l} by\alpha_1 + cz\alpha_1 + dy + z + x\alpha_1 + k\alpha_1 = 0, \\ ay + by\alpha_2 + bz + cz\alpha_2 + dx + x\alpha_2 + h + k\alpha_2 = 0, \end{array}\right\} \quad (26)$$

qui se réduisent en un point de la génératrice à :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \\ dx + \alpha_2 x + h + k\alpha_2 = 0. \end{array}\right\} \quad (27)$$

La surface (25) sera de raccordement, si la valeur de α_2 est celle de la surface en trois points (**28** et **42**).

D'où, trois équations de condition en (27) qui déterminent d, h et k.

Les surfaces de raccordement du premier ordre sont donc exprimées par (25) où a, b, c sont arbitraires et d, h, k déterminés.

Si la *normale était confondue avec* Oz *à l'origine*, on aurait dans (27) :

$$h = 0 \quad (\alpha_2 = 0, \quad x = 0).$$

— k est l'abcisse du point où la normale est confondue en direction avec Oy $(\alpha_2 = \infty, \quad x + k = 0)$.

Enfin — d est la tangente de l'angle fait par le plan tangent à l'origine avec le plan asymptote de la génératrice.

$$(x = \infty, \quad d + \alpha_2 = 0, \text{ voir n° } \mathbf{38}).$$

On voit donc qu'il est aisé de construire les éléments d, h et k pour une position quelconque de l'origine sur la génératrice, Oz étant pris suivant la normale à la surface en ce point.

DEUXIÈME ORDRE

46. En dérivant à nouveau (26), on obtiendra le point de la génératrice :

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 = 0 \\ d + \alpha_2 + \beta_2 (x + k) = 0 \\ a + 2b\alpha_2 + c\alpha_2^2 + \beta_3 (x + k) = 0 \end{array}\right\} \quad (28)$$

La surface réglée ayant un contact de premier ordre avec l'hyperboloïde envisagé, on démontrera, par dérivation des éléments identiques α le long de la génératrice, que les éléments β_1 et β_2 sont également identiques.

On dispose alors dans (28) des trois paramètres a, b, c pour écrire que l'hyperboloïde a l'élément β_3 de la surface, en trois points.

Hosted by Google

En effet, les cônes parallèles à σ et à l'hyperboloïde, tracés par un même sommet, ont aussi un contact du deuxième ordre le long de la génératrice commune, car les conditions du n° **43** (relations [24]) sont à fortiori vérifiées pour les cônes ou b, d, b_1, d_1 sont nuls.

Mais le cône parallèle de l'hyperboloïde doit avoir alors un contact du 2e ordre avec un plan ; il doit donc se réduire lui-même à deux plans, dont l'un est confondu avec P.

C. Q. F. D.

c) Les équations (33) qui existent entre les éléments de σ et S ont ici les inconnues $\frac{dy}{dx}$ et ${}_\sigma\beta_3$; celles-ci y sont donc déterminées.

d) Les équations (36) sont écrites ici entre les inconnues ${}_\sigma\beta'_1$ et ${}_\sigma\beta_3$, qui sont ainsi déterminées.

Si ces éléments permettent de déterminer ${}_\sigma\beta_3$ en trois points de G, le problème est résolu par le cas *a*) du n° **50.**

56. Dans le cas envisagé en **53,** en mettant Ox' suivant la tangente à L, on obtient en dérivant deux fois le long de L, les relations obtenues par l'identité des éléments α'_1 et α'_2 dans σ et S :

$$ {}_\sigma\gamma'_1 + {}_\sigma\beta'_2 \frac{d^2y'}{dx'^2} = s\gamma'_1 + s\beta'_2 \frac{d^2y'}{dx'^2}, $$

$$ {}_\sigma\gamma'_2 + {}_\sigma\beta'_3 \frac{d^2y'}{dx'^2} = s\gamma'_2 + s\beta'_3 \frac{d^2y'}{dx'^2}. $$

$\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est connu par les éléments de L (6).

Ces relations déterminent donc ${}_\sigma\gamma'_1$ et ${}_\sigma\gamma'_2$.

Les deux premières relations (11) déterminent alors γ_3 et γ_4, puisque γ_1 et γ_2 sont déterminés par (31).

Le problème est alors résolu par le cas *b*) du n° **50.**

57. Enfin, dans le cas envisagé au n° **54**, on obtient ici par dérivation de (35), pour le point A :

$$ 2{}_\sigma\beta'_1 \times {}_N\beta'_1 = {}_\sigma\gamma'_2 + {}_N\gamma'_2 + {}_\sigma\beta'_3 \frac{d^2y'}{dx'^2} + {}_N\beta'_3 \frac{d^2z'}{dx'^2}. $$

$\frac{d^2y'}{dx'^2}$ et $\frac{d^2z'}{dx'^2}$ sont déterminés par les éléments de L (6).

Cette équation détermine donc ${}_\sigma\gamma'_2$. D'ailleurs ${}_\sigma\gamma'_1$ est déterminé par les éléments de L également (n° **39**).

Comme au n° **56**, on détermine alors γ_3 et γ_4, et par suite on a la solution du problème par le cas *b*) du n° **50.**

Hosted by Google